# Практикум из Математике 2 – 9. 6. 2022.

## Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме: Број индекса:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | Сума 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

| Сума 1 | Сума 2 | Сума 3 | Сума |
|---|---|---|---|
| | | | |

Тест траје 45 минута. Сваки задатак вреди 1 бод.

**1**. Одредити неодређене интеграле:

**(а)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$;

**(б)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$.

**2**. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}.$$

**3**. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\ln(2\,x)\mathrm{d}x}{x\,\ln(4\,x)}.$$

**4**. Свести интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x}$ на интеграл рационалне функције, користећи смену:

**(а)** $t = \sin x$; **(б)** $t = \operatorname{tg} x$.

**5**. Израчунати одређени интеграл

$$\int_{-1}^{1} (1-|x|)(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

| 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | Сума 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**6**. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају криве $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

**7.** Величина запремине тела насталог ротацијом криве $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4x+3}}$, $y \in [0,3]$ око $x$-осе једнака је:

**(а)** $\pi \ln 2$; **(б)** $\pi \ln 3$; **(в)** $\pi \ln 4$; **(г)** $\pi \ln \frac{1}{3}$;

**(д)** ниједном од понуђених одговора.

**8**. Испитати конвергенцију несвојствених интеграла:

**(а)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; **(б)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

**(в)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$; **(г)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

**9.** Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$\cos y\,\sin x\,y' = -\sin y\,\cos x,$$

$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

**10.** Одговарајућом сменом свести Бернулијеву диференцијалну једначину

$$y' - x\,y = x^3\,y^2$$

на линеарну диференцијалну једначину првог реда.

| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | Сума 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**11.** Одредити реалне константе $a$ и $b$ тако да $y_p = a\,x + b$ буде једно партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 12x + 17.$$

**12.** Одредити опште решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима

$$y'' - 7y' + 12y = 12x + 17.$$

**13.** Испитати да ли је ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{7^n}.$$

конвергентан. Детаљно образложити одговор.

**14.** Одредити полупречник конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

**15.** Испитати да ли је тачна једнакост

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!} 7^n = 3^7.$$

Детаљно образложити одговор.

## – Решења –

**1**. Имамо да је:

**(а)** $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2} + C;$$

**(б)** $$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& x+2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\,(x+2) = \mathrm{d}x \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\,(x+2) + C.\end{aligned}$$

**2**. Имамо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& x+2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\,(x+2) = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{t+1-(t-1)}{t^2-1}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}\,t}{t+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C.$

**3**. Имамо да је $\displaystyle\int \frac{\ln(2\,x)\mathrm{d}x}{x\,\ln(4\,x)} = \int \frac{(\ln 2 + \ln x)\mathrm{d}x}{x\,(\ln 4 + \ln x)} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \ln x \\ \mathrm{d}t &=& \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{\ln 2 + t}{\ln 4 + t}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\ln 4 + t - \ln 2}{\ln 4 + t}\mathrm{d}t = t - \ln 2 \ln|\ln 4 + t| + C = \ln x - \ln 2 \ln|\ln(4x)| + C.$

**4**. Имамо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x} = \int \frac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\sin^2 x\,\cos x} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \cos x \\ \mathrm{d}t &=& -\sin x\ \mathrm{d}x \end{array} \right\} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1-t^2)}.$

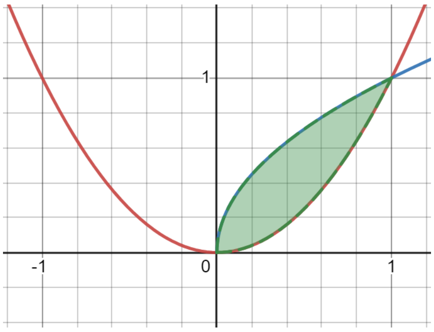
Такође важи $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x} = \int \frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\sin x\,\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \sin x \\ \mathrm{d}t &=& \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1-t^2)}.$

Даље имамо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x} = \int \frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\sin x\,\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \operatorname{tg} x \\ \mathrm{d}t &=& \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}.$

Још један начин да се овај интеграл сведе на интеграл рационалне функције јесте коришћењем смене $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Добијамо $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \\ \mathrm{d}t &=& \dfrac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} \end{array} \right\} = \int \frac{(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{t\,(1-t^2)}.$

**5**. Имамо да је $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)(\sin x + \cos x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-|x|)\sin x\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos x\ \mathrm{d}x$. Интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)\sin x\ \mathrm{d}x$ је једнак 0 пошто је подинтегрална функција непарна, а интервал интеграције симетричан у односу на координатни почетак. Даље важи да је $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos x\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1(1-x)\cos x\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1\cos x\ \mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\cos x\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & \mathrm{d}\,v = \cos x\ d\,x, \\ \mathrm{d}\,u = \mathrm{d}x, & v = \sin x \end{array} \right\} = 2\sin x\Big|_0^1 - 2\,x\,\sin x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \sin x = -2\cos x\Big|_0^1 = 2 - 2\cos 1.$

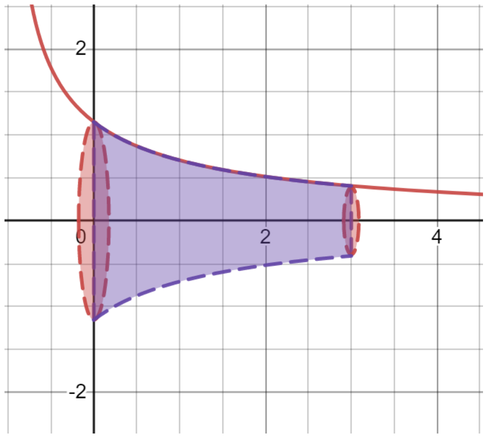
**6**.




Одредимо прво тачке пресека кривих $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Имамо да апсцисе пресечних тачака задовољавају једначину $x^2 = \sqrt{x}$, тј. $x^4 = x$, $x \geq 0$. Према томе, пресечне тачке су $(0,0)$ и $(1,1)$. Тражена величина једнака је вредности итеграла

$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

**7**.




Тражена величина једнака је вредности итеграла

$$\begin{aligned} P &= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{x^2+4x+3} \, \mathrm{d}x = 2\pi \ln \left|\frac{x+1}{x+3}\right| \Bigg|_0^3 \\ &= 2\pi \left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3}\right) = \pi \ln 4. \end{aligned}$$

Тачан одговор је **(в)**.

**8**. Важи да је

**(а)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln 1 - \lim_{a\to 0^+} \ln a = \infty;$

**(б)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to +\infty} \ln b - \ln 1 = \infty;$

**(в)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -1 + \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a} = \infty;$

**(г)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\lim_{b\to +\infty} \frac{1}{b} + 1 = 1.$

Интеграли у примерима **(а)**, **(б)** и **(в)** су дивергентни. Интеграл у примеру **(г)** је конвергентан и вредност му је 1.

**9**. У питању је диференцијална једначина првог реда која раздваја променљиве. Заиста, уколико поделимо једначину $\cos y \, \sin x \, y' = -\sin y \, \cos x$ са $\sin x \, \sin y$ добијамо $\operatorname{ctg} y \, \mathrm{d}y + \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x = 0$. Интеграљењем дате једнакости добијамо $\int \operatorname{ctg} y \, \mathrm{d}y + \int \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x = C$, односно

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} \mathrm{d}y + \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = C,$$

и решење $\ln \sin y + \ln \sin x = C$, тј. $\sin x \, \sin y = \widehat{C}$.

**10**. Сменом $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2} y'$, једначину $y' - x\,y = x^3 y^2$, сводимо на линеарну диференцијалну једначину $z' + x\,z = -x^3$.

**11**. Први и други извод функције $y_p = a\,x + b$ су $y_p' = a$ и $y_p'' = 0$. Заменом датих израза у једначину $y'' - 7y' + 12y = 12\,x + 17$ добијамо $-7\,a + 12\,a\,x + 12\,b = 12\,x + 17$, одакле следи да је $a = 1$ и $b = 2$. Одговарајуће партикуларно решење дате једачине је $y_p = x + 2$.

**12**. Опште решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима $y''-7y'+12y=12\,x+17$ једнако је збиру општег решења одговарајуће хомогене диференцијалне једначине $y''-7y'+12y=0$ и произвољног партикуларног решења нехомогене. Опште решење хомогене диференцијалне једначине $y''-7y'+12y=0$ одређујемо помоћу карактеристичне једначине $\lambda^2-7\lambda+12=0$. Корени дате карактеристичне једначине су $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=3$. Одговарајућа партикуларна решења су $y_1=e^{3x}$ и $y_2=e^{4x}$. Опште решење хомогене диференцијалне једначине $y''-7y'+12y=0$ је $y_h=C_1\,y_1+C_2\,y_2=C_1\,e^{3x}+C_2\,e^{4x}$. Видели смо у претходном задатку да је једно партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине $y_p=x+2$. Према томе, њено опште решење је $y=y_h+y_p=C_1\,e^{3x}+C_2\,e^{4x}+x+2$.

**13**. Општи члан реда једнак је $3\left(\dfrac{3^2}{7}\right)^n=3\left(\dfrac{9}{7}\right)^n$, па је $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{7^n}=3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{7}\right)^n$. Последњи ред је дивергентан као геометријски ред са количником $\dfrac{9}{7}\geq 1$. Самим тим, је и ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{7^n}$ дивергентан.

**14**. Нека је $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$. Имамо да је

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

одакле налазимо да је тражени полупречник конвергенције датог реда

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

**15**. Како је $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ за свако $x\in\mathbb{R}$, следи да је $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, за $a>0$, $a\neq 1$. За $a=3$ и $x=7$ добијамо $3^7=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln^n 3}{n!}7^n$. Дакле, наведена једнакост је тачна.